Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 13

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: keine, nicht bewertetes Übungsblatt zur Vorbereitung auf die Prüfung

Aufgabe 13.1 *Fragen zu Themen der Vorlesung*
Bitte beachten Sie, dass die folgende Liste nicht vollständig ist und in der Prüfung auch andere Fragen zum Stoff der Vorlesung möglich sind.

Kapitel 1

- Was unterscheidet eine partielle von einer gewöhnlichen Differentialgleichung?

Kapitel 2

- Welche analytischen Werkzeuge werden in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen häufig verwendet?
- An welchen Stellen in der Theorie partieller Differentialgleichungen wird der Gaussche Integralsatz angewendet?
- An welchen Stellen in der Theorie partieller Differentialgleichungen werden die Greenschen Formeln angewendet?
- Wie ist der Laplace-Operator definiert?
- Welche Symmetrieeigenschaften besitzt der Laplace-Operator?
- Wie lautet die Potentialgleichung?
- Was für Prozesse können mit der Potentialgleichung beschrieben werden?
- Was ist eine Fundamentallösung?
- Welcher Ansatz wird benutzt, um eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung zu erhalten?
- Wie lautet die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung?
- Was sind wesentliche Eigenschaften der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung?
- Wie lautet das klassische Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung?
- Welche Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des klassischen Dirichlet-Problems der Kugel kennen Sie? Was sind die wesentlichen Ideen des Beweises?
- Wofür wird eine Greensche Funktion benutzt? Was unterscheidet sie von einer Fundamentallösung?
- Welche Ideen liegen der Konstruktion der Greenschen Funktion für den Laplace-Operator zugrunde?
- Wie lautet die Greensche Funktion der Kugel zum Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung?

Bitte wenden!

- Wofür benutzt man das Poisson-Integral?
- Wie lautet die Darstellung des Poisson-Integrals?
- Was ist eine harmonische Funktion?
- Nennen Sie wesentliche Eigenschaften von harmonischen Funktionen?
- Was kann man mit Hilfe des Maximumsprinzips beweisen? Nennen Sie wesentliche Folgerungen des Maximumprinzips.
- Formulieren Sie die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. Was sind wesentliche Folgerungen?
- Wie lautet die Harnacksche Ungleichung? Wofür kann sie verwendet werden?
- Was sind super- und subharmonische Funktionen?
- Welche Eigenschaften von harmonsichen Funktionen lassen sich (evtl. abgeschwächt) auf subharmonische Funktionen übertragen?
- Wofür benutzt man das Perron-Verfahren?
- Was ist die wesentliche Idee des Perronverfahrens?
- Was sind die Hauptschritte im Beweis des Perronverfahrens? Welche Eigenschaften harmonischer und subharmonischer Funktionen macht man sich zu Nutze?
- Was ist ein regulärer Randpunkt?
- Nennen Sie hinreichende geometrische Kriterien, die implizieren, dass ein Randpunkt regulär ist.
- Nennen Sie Beispiele für nicht reguläre Randpunkte?
- Was sind Barriere-Funktionen und wofür benutzt man sie?
- Welche Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems der Laplace-Gleichung kennen Sie? Was sind die wesentlichen Ideen bzw. Techniken des Beweises?
- Formulieren Sie das klassische Neumann-Problem der Laplace-Gleichung.
- Was besagt die Kompatibilitätsbedingung des Neumannproblems?
- Welche Besonderheiten muss man beachten, wenn man Eindeutigkeit der Lösung des Neumannproblems erreichen will?
- Welche Aussagen zur Existenz- und Eindeutigkeit des klassischen Neumannproblems der Laplacegleichung kennen Sie?

Kapitel 3

- Wie lautet die Poisson-Gleichung?
- Was für Prozesse können mit der Poissongleichung beschrieben werden?
- Formulieren Sie das klassische Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung.
- Geben Sie das Newton-Potential an. Wofür wird es verwendet? Nennen Sie wesentliche Eigenschaften. Welche analytischen Werkzeuge werden benutzt, um diese Eigenschaften zu beweisen?

- Was versteht man unter Hölderstetigkeit?
- Wo wird Hölderstetigkeit in der klassischen Theorie der Poisson-Gleichung verwendet?
- Nennen Sie Beispiele für hölderstetige Funktionen.
- Welche Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zum klassischen Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung kennen Sie? Was sind die wesentlichen Ideen und Werkzeuge des Beweises?
- Kennen Sie ein Beispiel, das zeigt, dass $f \in C^0$ nicht ausreicht, um eine klassische Lösung von $\Delta u = f$ in Ω, $u = v$ auf $\partial\Omega$ zu erhalten (vgl. Übung 7.3)?
- Nennen Sie ein Anwendungsbeispiel, bei dem die Poissongleichung eine Rolle spielt.

Kapitel 4

- Was verstehen Sie unter einem linearen Differentialoperator zweiter Ordnung?
- Was ist ein elliptischer/parabolischer/hyperbolischer Differentialoperator?
- Geben Sie ein Beispiel für je einen elliptischen/parabolischen/hyperbolischen Differentialoperator.
- Geben Sie ein Beispiel für einen einen Differentialoperator, der weder elliptisch, noch hyperbolisch, noch parabolisch ist.
- Geben Sie ein Beispiel für einen Differentialoperator, der abhängig vom Ort elliptisch, parabolisch und hyperbolisch ist.

Kapitel 5

- Formulieren Sie das schwache Maximumprinzip für elliptiche Differentialoperatoren.
- Nennen Sie eine Folgerung aus dem schwachen Maximumprinzip.
- Formulieren Sie das starke Maximumprinzip für elliptische Differentialoperatoren.
- Was ist *das* wesentliche Werkzeug im Beweis des starken Maximumprinzips für elliptische Operatoren?

Kapitel 6

- Definieren Sie den Begriff *schwache Ableitung*.
- Welche wesentliche Idee steht hinter dem Konzept der schwachen Ableitung.
- In welcher Verbindung stehen starke (klassische) und schwache Ableitungen zueinander?
- Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die (in mindestens einem Punkt) schwach aber nicht stark differenzierbar ist.
- Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die (in mindestens einem Punkt) nicht schwach differenzierbar ist.
- Definieren Sie den Funktionenraum $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$.

Bitte wenden!

- Wie wird die Sobolevnorm definiert?
- Nennen Sie verschiedene Herangehensweisen, wie man Sobolevräume erhalten kann.
- Definieren Sie den Funktionenraum $H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$.
- Was verstehen Sie unter einer Faltung?
- Nennen Sie wesentliche Eigenschaften der Faltung.
- Was besagt die Youngsche Ungleichung für Faltungen?
- Was ist eine Dirac-Folge? Was ist eine Standard-Dirac-Folge?
- Nennen Sie wesentliche Anwendungen von Faltungen und Dirac-Folgen.
- Was bedeutet "Glättung" von Funktionen?
- In welchem Verhältnis stehen $H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$ und $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$ zueinander?
- Nennen Sie die wesentlichen Ideen und Werkzeuge des Satzes von Meyers-Serrin.
- Argumentieren Sie, warum $H^{m,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nicht identisch zu $W^{m,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sein kann für offene, nichtleere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- Definieren Sie den Raum $W_0^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$.
- Formulieren Sie die Poincaré-Ungleichung.
- Formulieren Sie die Produktregel für Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$.
- Was ist eine Testfunktion?
- Warum ist es praktisch Testfunktionen mit kompaktem Träger zu betrachten?
- Was besagt der Fundamentalsatz (das Fundamentallemma) der Variationsrechnung?
- Nennen Sie wesentliche analytische Werkzeuge, die in der Theorie der schwachen Ableitungen eine Rolle spielen.

Kapitel 7

- Was sind wesentliche Ideen des Konzepts der schwachen Lösung?
- Wie können Nullrandwerte auf das Konzept der schwachen Lösungen verallgemeinert werden?
- Formulieren Sie das schwache Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung mit Nullrandwerten.
- Wie kann man partielle Differentialgleichungen als Hilbertraumprobleme auffassen?
- Was ist eine stetige, koerzive Bilinearform?
- Was besagt das Lemma von Stampacchia?
- Nennen Sie die wesentlichen Ideen des Beweises des Lemmas von Stampacchia?
- Was ist eine Minimalfolge?
- Was besagt die Parallelogramm-Identität?

- Was wissen Sie über die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der Poissongleichung mit verschwindenden Dirichlet-Randwerten. Nennen sie wesentliche Ideen des Beweises.
- Demonstrieren Sie am Beispiel des schwachen Dirichlet-Problems der Poissongleichung mit Nullrandwerten, wie eine PDG als Hilbertraum-Problem formuliert werden kann.
- Formulieren Sie das schwache Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung für allgemeine Dirichlet-Randwerte. Was wissen Sie über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen?

Kapitel 8

- Was besagt der Rieszsche Darstellungssatz?
- Mit Hilfe welchen Lemmas kann der Rieszsche Darstellungssatz bewiesen werden? Geben Sie den Beweis an.
- Was ist eine Operatornorm?
- Geben sie die Definition der schwachen Lösung eines elliptischen Randwertproblems an.
- Was besagt der Satz von Lax-Milgram?
- Warum ist der Satz von Lax-Milgram im Zusammenhang mit schwachen elliptischen Randwertproblemen nützlich?
- Was sind die wesentlichen Schritte des Beweises von Lax-Milgram? Welche Voraussetzungen sind notwendig? Warum?
- Formulieren Sie den Spursatz.

Kapitel 9

- Wie kann man die Diffusionsgleichung herleiten bzw. motivieren? Welche physikalischen Prinzipien liegen ihr zugrunde?
- Welche Gedanken und Techniken liegen der Herleitung der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung zugrunde?
- Geben sie die Fundamentallösung der Wärmeleitungsleichung an.
- Was sind wichtige Eigenschaften der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fundamentallösung in einer Dimension und der Fundamentallösung in mehreren Dimensionen?
- Definieren Sie das klassische Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum.
- Geben Sie die Lösung das klassischen homogenen Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung an. Wie zeigt man, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt?

Bitte wenden!

- Was versteht man unter der „unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen“? Ist das realistisch?
- Formulieren Sie das Prinzip von Duhamel und wenden Sie es an um eine Lösung des klassischen inhomogenen Ganzraumproblems der Wärmeleitungsgleichung mit verschwindenden Anfangsdaten zu erhalten. Wie kann man zeigen, dass es sich tatsc̈hlich um eine Lösung handelt?
- Was versteht man unter dem parabolischen Zylinder und dem parabolischen Rand?
- Geben Sie die Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung an.
- Geben Sie das Maximumprinzip der Wärmeleitungsgleichung an.
- Was sind wesentliche Folgerungen aus dem Maximumprinzip?
- Formulieren Sie das Maximumprizip der Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum. Was sind wesentliche Beweisideen?
- Was wissen Sie über die Eindeutigkeit von klassischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung?
- Was versteht man unter einer „unphysikalischen Lösung“der Wärmeleitungsgleichung? Geben Sie ein Beispiel an.
- Was wissen Sie über die Regularität von Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung? Welche Grundideen liegen dem Beweis zu Grunde?

Kapitel 10

- Was ist ein Anfangs-Randwert-Problem?
- Definieren Sie den Raum $C([0,T],X)$ und geben Sie eine geeignete Norm an, wobei $T>0$, und X ein Banachraum ist.
- Definieren Sie den Raum $L^p([0,T],X)$, wobei $T>0$ und X ein Banachraum ist. Wofür benötigt man derartige Räume?
- Geben Sie ein Skalarprodukt auf $L^2([0,T],X)$ an, wobei $T>0$ und X ein Banachraum ist.
- Definieren Sie eine schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung.
- Welche Resultate aus der Funktionalanalysis kommen in der Theorie der schwachen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zum Einsatz?
- Was besagt der Darstellungssatz der schwachen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Nennen Sie eine wesentliche Folgerung.
- Formulieren Sie ein Existenzresultat der schwachen Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Was sind die wesentlichen Schritte des Beweises?
- Fassen Sie die Vorgehensweise, die zur Existenz der schwachen Lösungen führt, zusammen.
- Was versteht man unter einem Galerkin-Verfahren?
- Was ist der Unterschied zwischen einem Galerkin-Verfahren und der Rothe-Methode?

Kapitel 11

- Wie lautet die Transportgleichung im $\mathbb{R}^n$ mit vorgegebenen Anfangsdaten? Wie lautet ihre Lösung?
- Beschreiben Sie die Methode der Charakteristiken.
- Welche wesentlichen Ideen liegen der Methode der Charakteristiken zugrunde?
- Was ist eine semilineare PDG erster Ordnung?
- Was ist eine quasilineare PDG erster Ordnung?
- Unter welchen Bedingungen kann man lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des Cauchy-Problems von semi- bzw. quasilinearen PDG erster Ordnung erwarten?
- Geben Sie ein Beispiel, bei dem keine lokale Lösung existiert.
- Mit welchen Schwierigkeiten müssen Sie rechnen, wenn Sie globale Lösungen von PDG erster Ordnung suchen?

Kapitel 12

- Wie lautet die Wellengleichung?
- Welche physikalischen Prinzipien liegen der Wellengleichung zugrunde?
- Wie kann man eine Lösung des homogenen Ganzraumproblems der Wellengleichung in einer Raumdimension erhalten? Wie lautet diese?
- Was bedeutet Abhängigkeitsbereich?
- Was bedeutet Einflussbereich?
- Wie kann man eine Lösung des homogenen Ganzraumproblems der Wellengleichung in drei Raumdimensionen erhalten? Wie lautet diese? Was sind wesentliche Hilfsmittel in der Herleitung?
- Wie kann man eine Lösung des homogenen Ganzraumproblems der Wellengleichung in zwei Raumdimensionen erhalten? Wie lautet diese? Was sind wesentliche Hilfsmittel in der Herleitung?
- Vergleichen Sie die Einzugs- und Abhängigkeitsbereiche des Ganzraumproblems der Wellengleichung in 1, 2 und 3 Raumdimensionen.
- Was besagt das Huygenssche Prinzip? Wann ist es gültig?
- Wie kann man Lösungen zum inhomogenen Ganzraumproblem der Wellengleichung konstruieren? Wie sehen diese im Fall $n = 3$ aus?
- Nennen Sie ein Resultat, das sich mit der Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichung befasst.

Bitte wenden!

Kapitelübergreifende Fragen

- Was für Lösungskonzepte kennen Sie?
- Was für Lösungstechniken bzw. analytische Techniken zur Darstellung von Lösungskandidaten haben Sie kennengelernt?
- Was für physikalische oder biologische Prozesse können Sie mit den Ihnen bekannten PDG beschreiben?
- Welche physikalischen Prinzipien liegen der Diffusions- und Wellengleichung zugrunde? Welche vereinfachenden Annahmen wurden bei der Herleitung der Gleichung getroffen?
- An welchen Stellen sind Ihnen Mittelwerteigenschaften begegnet? Wofür kann man sie benutzen?
- Für welche Gleichungstypen kennen Sie Maximumprinzipien?
- Was sind wesentliche Folgerungen aus Maximumprinzipien?
- Was sind wesentliche Eigenschaften der Lösungen von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen?
- Was sind wichtige analytische Werkzeuge, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine Rolle spielen? Nennen Sie Beispiele.
- An welchen Stellen spielen gewöhnliche Differentialgleichungen eine Rolle in der Theorie der PDG?
- Kennen Sie ein Beispiel für eine PDG, die eine schwache aber keine starke Lösung besitzt? (vgl. z.B. Aufgabe 7.3)
- Was für Arten von Randwerten kennen Sie? Motivieren Sie diese aus der Perspektive einer physikalischen, biologischen oder sonstigen Anwendung.
- Nennen Sie Beispiele, wo Minimierer eine Rolle in der Theorie der PDG spielen.
- Was sind typische Anwendungen von Abschneidefunktionen?
- Welche Ihnen bekannten Resultate beruhen auf Hilbertraum-Eigenschaften und lassen sich nicht (ohne weitere Arbeit) auf Banachräumen anwenden?
- An welchen Stellen haben wir ausgenutzt, dass Sobolev-Räume Banachräume sind?
- Nennen Sie Beispiele für eine elliptische, eine hyperbolische und eine parabolische PDG. Welche physikalischen Prozesse können mit den jeweiligen Gleichungen beschrieben werden?
- Nennen Sie den Fundamentalsatz (Fundamentallemma) der Variationsrechnung. An welchen Stellen findet es Anwendungen?
- An welchen Stellen spielen geometrische Argumente oder Symmetrieüberlegungen eine Rolle?
- An welchen Stellen der Theorie der PDG kommen Funktionen mit kompaktem Träger zum Einsatz? Warum?
- Was für Techniken werden verwendet, um zu zeigen, dass Rand- bzw. Anfangswerte angenommen werden?

- Nennen Sie Techniken, die in Existenzbeweisen verwendet werden.

Aufgabe 13.2 *Laplace-Gleichung auf dem Halbraum*
Sei $n \geq 2$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

wobei $g \in C^0_b(\partial\mathbb{R}^n_+)$. Bestimmen Sie eine Lösungsdarstellung von u.

Hinweis. Nutzen Sie die Übungsaufgabe 2.2.

Aufgabe 13.3 *Lösungen der Poisson-Gleichung*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

(a) Sei $f \in C^0(\Omega)$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{für alle } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ besitzt.

(b) Sei $\Omega = B_1(0)$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 1 - |x|^2 & \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für alle } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u(x) \leq 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Aufgabe 13.4 *Klassifizierung partieller Differentialgleichungen*
Bestimmen Sie für die semilineare partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,y) + xu_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + \arctan(|\nabla u(x,y)|^2) = 0$$

in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ob diese elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13.5 *Schwache Differenzierbarkeit*
Sei $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ schwach differenzierbar ist und bestimmen Sie ggfs. in welchen Sobolev-Räumen $W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $H^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ die Funktion f liegt.

Aufgabe 13.6 *Schwache Lösungen der Poisson-Gleichung*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Geben Sie die schwache Formulierung für das Randwertproblem aus Aufgabe 13.3 (a) an und beweisen Sie die eindeutige Lösbarkeit desselben Problems im schwachen Sinne.